

Problemi di Fisica

La Cinematica

Moti unidimensionali

PROBLEMA

Sei in un'automobile che sta andando in autostrada. Quale sarà la tua traiettoria rispetto al sistema di riferimento "automobile che sta sorpassando"?

Soluzione

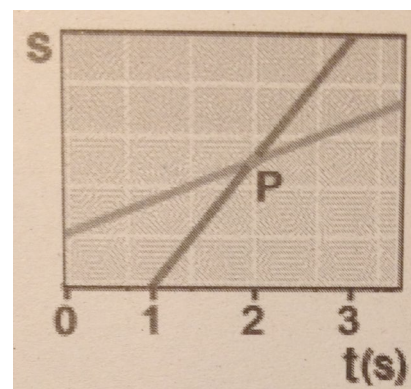
Il moto è un concetto relativo, e la sua descrizione cambia a seconda del sistema di riferimento. Un oggetto può essere contemporaneamente in moto rispetto ad un sistema di riferimento ed in quiete, o in moto con differente velocità, rispetto ad un altro sistema di riferimento. **Pertanto, la risposta al quesito è: la traiettoria è una retta percorsa all'indietro.**

PROBLEMA

Cosa si può dire analizzando questo grafico spazio-tempo?

Soluzione

Le due rette rappresentano le leggi del moto di due punti materiali (per esempio due macchine) che si muovono di moto rettilineo uniforme. La retta meno pendente (velocità più bassa) è riferita alla macchina che parte da una posizione iniziale più avanti rispetto alla seconda macchina. Però, la seconda macchina, avendo una velocità maggiore della prima (retta più pendente), nonostante parta più indietro rispetto alla prima, dopo un certo tempo la raggiungerà. **Pertanto, il punto P, intersezione delle due rette, rappresenta la situazione fisica in cui la seconda macchina raggiunge la prima.** In particolare, le coordinate del punto P (tempo e spazio), rappresentano l'istante e la posizione in cui la seconda macchina raggiunge la prima.



PROBLEMA

Rappresentare graficamente le seguenti leggi del moto rettilineo uniforme e commentarle:

1) $S = 10 - 2t$

2) $S = 5t$

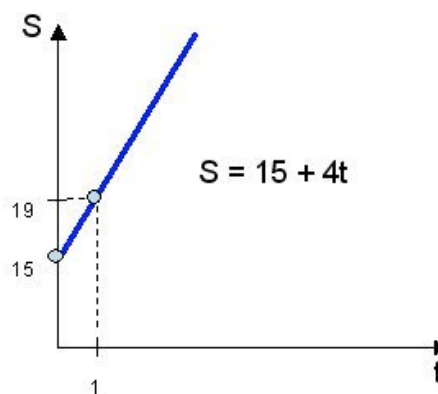
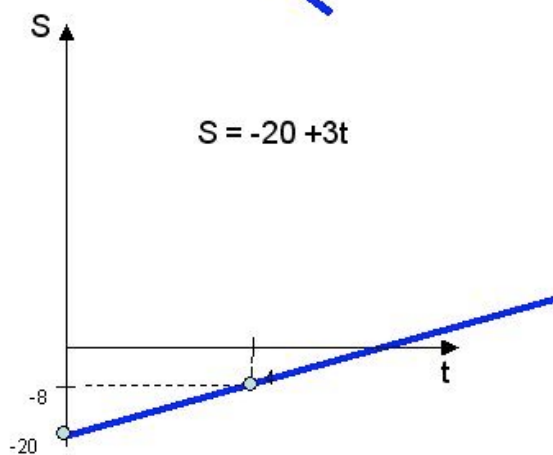
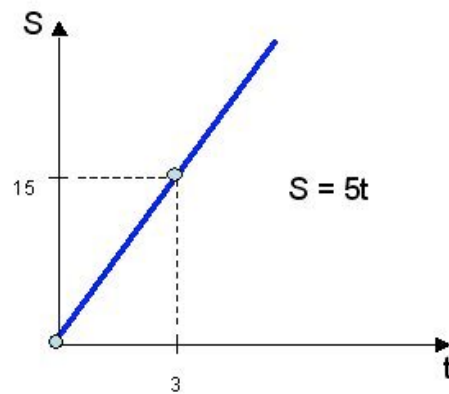
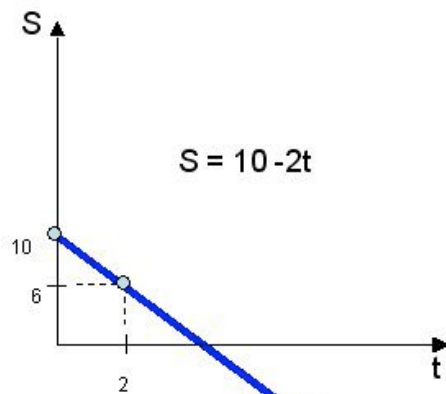
3) $S = -20 + 3t$

4) $S = 15 + 4t$

Soluzione

Procedura: il grafico della legge del moto rettilineo uniforme è una retta, e per disegnarla abbiamo bisogno di due punti che vengono così individuati:

un punto è dato dalla posizione iniziale S_0 , che è situato sull'asse delle S in quanto rappresenta l'intersezione della retta con l'asse stesso, l'altro punto si individua assegnando arbitrariamente alla variabile tempo t un valore positivo che va sostituito nella legge del moto per ricavare la variabile S.



$$S = 10 - 2t \Rightarrow t = 2; S = 10 - 2 \cdot 2 = 6 \Rightarrow \text{I due punti sono: } A=(0; 10) \text{ } B=(2; 6)$$

$$S = 5t \Rightarrow t = 3; S = 5 \cdot 3 = 15 \Rightarrow \text{I due punti sono: } A=(0; 0) \text{ } B=(3; 15)$$

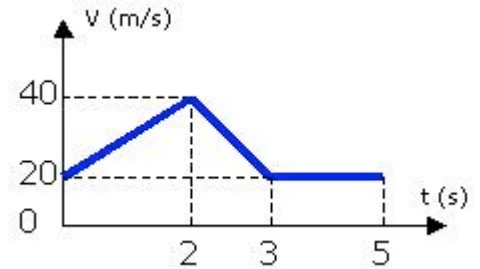
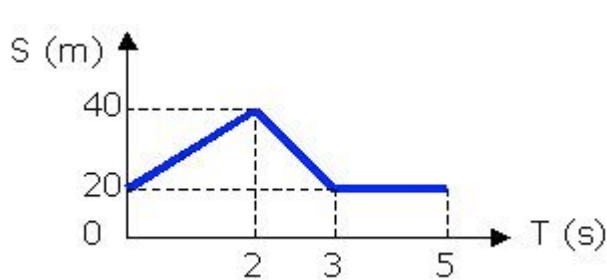
$$S = -20 + 3t \Rightarrow t = 4; S = -20 + 3 \cdot 4 = -8 \Rightarrow \text{I due punti sono: } A=(0; -20) \text{ } B=(4; -8)$$

$$S = 15 + 4t \Rightarrow t = 1; S = 15 + 4 \cdot 1 = 19 \Rightarrow \text{I due punti sono: } A=(0; 15) \text{ } B=(1; 19)$$

- ◆ $S = 10 - 2t \Rightarrow$ Si tratta di un punto materiale che si muove di moto rettilineo uniforme: parte dalla posizione iniziale di 10 m e percorre la traiettoria verso sinistra (all'indietro rispetto al punto di partenza) con la velocità costante di 2 m/s
- ◆ $S = 5t \Rightarrow$ Si tratta di un punto materiale che si muove di moto rettilineo uniforme: parte dall'origine del sistema di riferimento e percorre la traiettoria verso destra (in avanti rispetto al punto di partenza) con la velocità costante di 5 m/s
- ◆ $S = -20 + 3t \Rightarrow$ Si tratta di un punto materiale che si muove di moto rettilineo uniforme: parte dalla posizione iniziale di -20 m (alla sinistra dell'origine del sistema di riferimento) e percorre la traiettoria verso destra (in avanti rispetto al punto di partenza) con la velocità costante di 3 m/s
- ◆ $S = 15 + 4t \Rightarrow$ Si tratta di un punto materiale che si muove di moto rettilineo uniforme: parte dalla posizione iniziale di 15 m e percorre la traiettoria verso destra (in avanti rispetto al punto di partenza) con la velocità costante di 4 m/s

PROBLEMA

Descrivi i seguenti grafici e scrivi le seguenti leggi del moto: primo grafico tratto tra 0 e 2 s; secondo grafico tratto tra 2 e 3 s.



Soluzione

Grafico 1: Il punto materiale si muove prima in avanti di 20 m in 2 s con una velocità:

$$v_1 = \frac{\Delta s_1}{\Delta t_1} = \frac{40 - 20}{2 - 0} = 10 \text{ m/s}$$

poi all'indietro di 20 m in 1 s con una velocità:

$$v_2 = \frac{\Delta s_2}{\Delta t_2} = \frac{20 - 40}{3 - 2} = -20 \text{ m/s}$$

quindi resta fermo per 2 s.

- Legge del moto relativa al primo tratto (tra 0 e 2 s):

$$s = 20 + 10t$$

Grafico 2: Il punto materiale in 2 s passa da 20 m/s a 40 m/s e quindi accelera di:

$$a_1 = \frac{\Delta v_1}{\Delta t_1} = \frac{40 - 20}{2 - 0} = 10 \text{ m/s}^2$$

poi in 1 s passa da 40 m/s a 20 m/s e quindi decelera di:

$$a_2 = \frac{\Delta v_2}{\Delta t_2} = \frac{20 - 40}{3 - 2} = -20 \text{ m/s}^2$$

infine si muove a velocità costante di 20 m/s per 2 s.

- Legge del moto relativa al secondo tratto (tra 2 e 3 s):

$$s = s_0 + v_{02}t + \frac{1}{2}a_2t^2 = 60 + 40t + 10t^2$$

dove s_0 è la posizione occupata all'istante $t=2$ s e pari al tratto percorso nei primi due secondi:

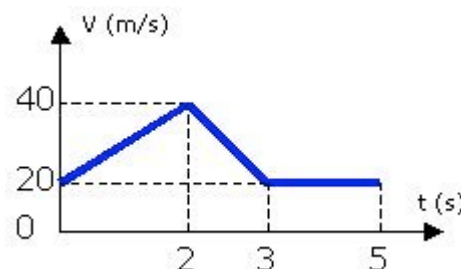
$$s_0 = v_{01}t_1 + \frac{1}{2}a_1t_1^2 = 20 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 2^2 = 60 \text{ m}$$

PROBLEMA

Dal grafico calcola la distanza complessiva percorsa dal punto materiale.

Soluzione

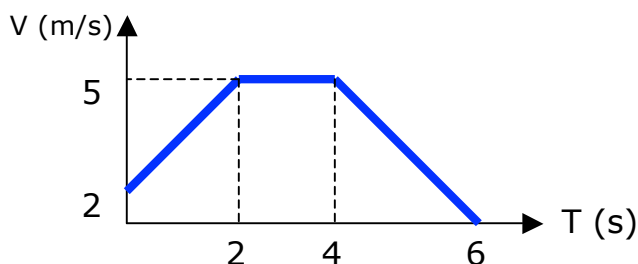
Il punto materiale in 2 s passa da 20 m/s a 40 m/s e quindi accelera di 10 m/s^2 , poi in 1 s passa da 40 m/s a 20 m/s e quindi decelera di 20 m/s^2 , infine si muove a velocità costante di 20 m/s per 2 s. La distanza complessiva percorsa dal punto materiale la calcoliamo nel seguente modo:



$$S = v_{01}t_1 + \frac{1}{2}a_1t_1^2 + v_{02}t_2 - \frac{1}{2}a_2t_2^2 + v_3t_3 = 20 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 2^2 + 40 \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 1^2 + 20 \cdot 2 = 130 \text{ m}$$

PROBLEMA

Dal grafico calcola la distanza complessiva percorsa dal punto materiale.



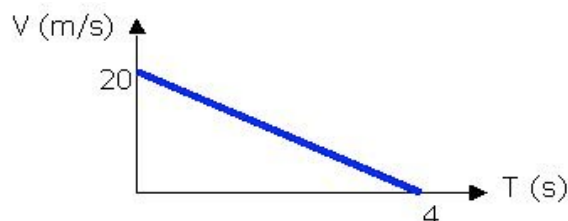
Soluzione

Il punto materiale in 2 s passa da 2 m/s a 5 m/s e quindi accelera di $1,5 \text{ m/s}^2$, poi per altri 2 s si muove di moto uniforme con velocità di 5 m/s; infine in 2 s passa da 5 m/s fino a fermarsi, quindi decelera di $2,5 \text{ m/s}^2$. La distanza complessiva percorsa dal punto materiale la calcoliamo nel seguente modo:

$$s = \left(v_{01}t_1 + \frac{1}{2}a_1t_1^2 \right) + (v_{02}t_2) + \left(v_{03}t_3 - \frac{1}{2}a_3t_3^2 \right) = \left(2 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 1,5 \cdot 2^2 \right) + (5 \cdot 2) + \left(5 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 2,5 \cdot 2^2 \right) = 22 \text{ m}$$

PROBLEMA

Il grafico rappresenta l'andamento nel tempo della velocità di un oggetto in moto su traiettoria rettilinea. Dopo 4,0 s l'oggetto si ferma e resta fermo. Scrivi l'equazione oraria del moto, sapendo che all'istante $t=0$ l'oggetto si trovava nella posizione $x=50 \text{ m}$. In quale istante e con quale velocità è passato per la posizione $x=76 \text{ m}$.



Soluzione

Poiché si tratta di un moto uniformemente decelerato, l'equazione oraria del moto è:

$$S = S_0 + V_0 \cdot t - \frac{1}{2} a t^2 = 50 + 20t - 2,5t^2 \quad \text{dove: } a = \frac{V_F - V_I}{t} = \frac{0 - 20}{4} = -5 \text{ m/s}^2$$

Per trovare l'istante in cui passa per la posizione $x=76$ m dobbiamo risolvere la seguente equazione:

$$76 = 50 + 20t - 2,5t^2 \Rightarrow 2,5t^2 - 20t + 26 = 0 \Rightarrow t = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 260}}{5} = \frac{20 \pm 11,8}{5} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 1,6\text{s} \\ t_2 = 6,4\text{s} \end{cases}$$

Va scartata la soluzione $t_2 = 6,4$ s perché l'oggetto dopo 4 s si ferma.

La velocità con cui l'oggetto passa per la posizione $x=76$ m è data da:

$$V = V_0 + a \cdot t = 20 - 5 \cdot 1,6 = 12 \text{ m/s}$$

PROBLEMA

Le leggi del moto di due treni sono:

$$s_1 = 20 + 5t \quad s_2 = 70 - 2t$$

a) Descrivere le due leggi del moto e dopo averle rappresentate sullo stesso sistema di assi cartesiani, commentare il grafico così ottenuto; b) Calcolare la posizione e l'istante in cui i due treni si incontrano.

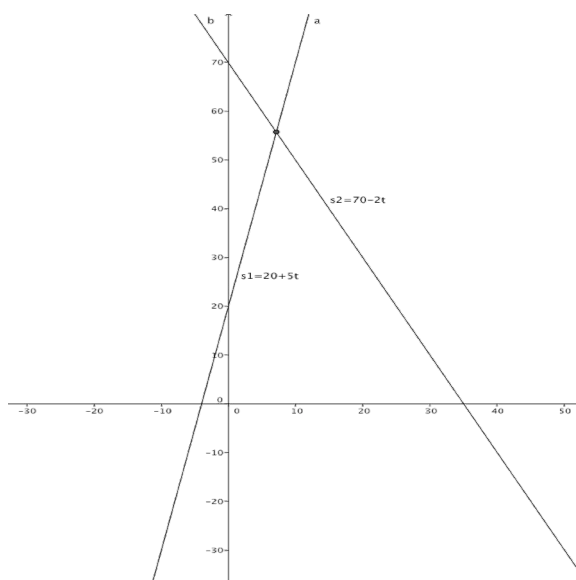
Se la legge del moto del secondo treno (viaggia verso destra) è:

$$s_2 = 5 + 4t^2$$

c) Descrivere la legge del moto e rappresentarla insieme a quella del primo treno sullo stesso sistema di assi cartesiani; d) Commentare il grafico ottenuto; e) Calcolare la posizione e l'istante in cui il secondo treno raggiunge il primo.

Soluzione

a) Prima legge: il treno si muove di moto rettilineo uniforme in avanti con velocità di 5 m/s, partendo da una posizione iniziale di 20 m rispetto all'origine del sistema di riferimento. Seconda legge: il treno si muove di moto rettilineo uniforme all'indietro con velocità di 2 m/s, partendo da una posizione iniziale di 70 m rispetto all'origine del sistema di riferimento. Le coordinate del punto d'intersezione tra le due rette rappresentano l'istante di tempo e la posizione in cui i due treni s'incontrano.



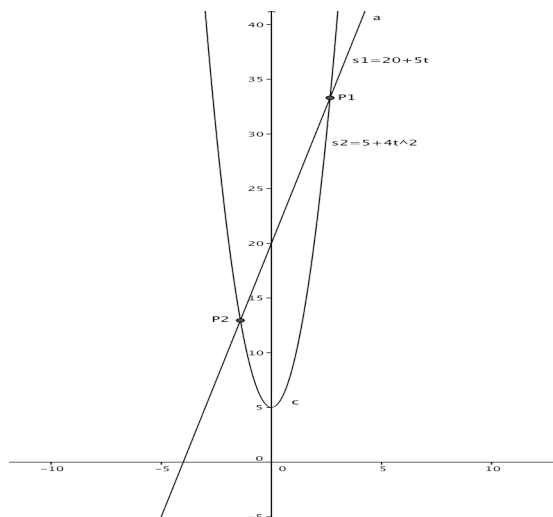
- b) La posizione e l'istante di tempo in cui s'incontrano i due treni, sono dati dalla soluzione del sistema formato dalle due leggi del moto:

$$\begin{cases} s_1 = 20 + 5t \\ s_2 = 70 - 2t \end{cases} \rightarrow 20 + 5t = 70 - 2t \rightarrow \begin{cases} t = 7,1s \\ s = 55,8m \end{cases}$$

- c) Il treno si muove di moto rettilineo uniformemente accelerato con accelerazione di $8m/s^2$, partendo da fermo e da una posizione iniziale di 5m rispetto all'origine del sistema di riferimento.

- d) Le coordinate del punto d'intersezione tra le due leggi del moto (retta e parabola), rappresentano l'istante di tempo e la posizione in cui i due treni s'incontrano. Si tenga presente che i punti d'intersezione sono due, ma solo il punto P1 ha significato fisico (la coordinata tempo del punto P2 non è fisicamente accettabile in quanto negativa).

- e) La posizione e l'istante di tempo in cui il secondo treno raggiunge il primo, sono dati dalla soluzione del sistema formato dalle due leggi del moto:



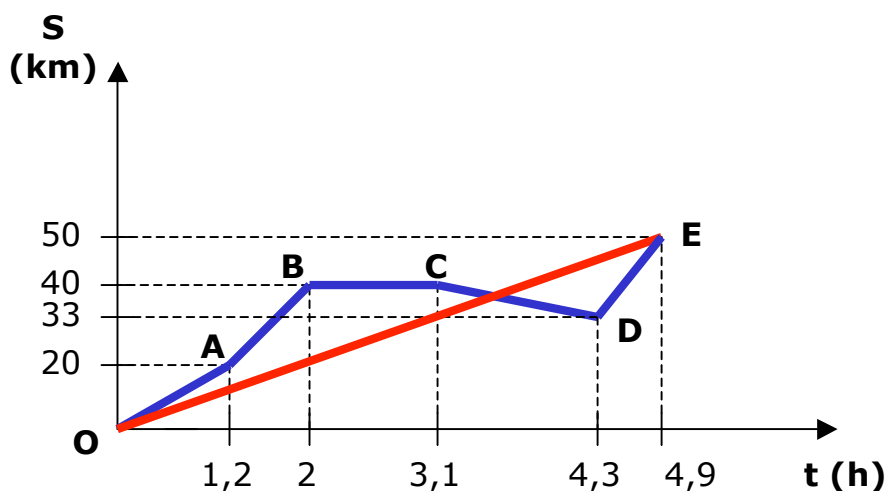
$$\begin{cases} s_1 = 20 + 5t \\ s_2 = 5 + 4t^2 \end{cases} \rightarrow 20 + 5t = 5 + 4t^2 \rightarrow 4t^2 - 5t - 15 = 0 \rightarrow t_1 = 2,7s \quad t_2 = -1,4s$$

$$\begin{cases} t = 2,7s \\ s = 33,5m \end{cases}$$

Abbiamo scartato la soluzione negativa del tempo in quanto fisicamente non accettabile.

PROBLEMA

Nel grafico seguente (linea blu) è mostrata la legge oraria del moto di un punto materiale. Calcolare la velocità dell'oggetto nei vari intervalli di tempo e la velocità media (pendenza linea rossa) su tutta la durata del moto.



Soluzione

La velocità verrà calcolata attraverso la sua definizione:

$$V = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S_{\text{Finale}} - S_{\text{Iniziale}}}{t_{\text{Finale}} - t_{\text{Iniziale}}}$$

Tratto – OA – $\Rightarrow V_{OA} = \frac{20}{1,2} = 16,7 \text{ km/h} = 4,6 \text{ m/s} \Rightarrow$ Il punto materiale si muove in avanti con $V = \text{cost}$

Tratto – AB – $\Rightarrow V_{AB} = \frac{40 - 20}{2 - 1,2} = 25 \text{ km/h} = 6,9 \text{ m/s} \Rightarrow$ Il punto materiale si muove in avanti con $V = \text{cost}$

Tratto – BC – $\Rightarrow V_{BC} = 0 \Rightarrow$ Il punto materiale è fermo

Tratto – CD – $\Rightarrow V_{CD} = \frac{33 - 40}{4,3 - 3,1} = -5,8 \text{ km/h} = 1,6 \text{ m/s} \Rightarrow$ Il punto materiale torna indietro con $V = \text{cost}$

Tratto – DE – $\Rightarrow V_{DE} = \frac{50 - 33}{4,9 - 4,3} = 28,3 \text{ km/h} = 7,9 \text{ m/s} \Rightarrow$ Il punto materiale si muove in avanti $V = \text{cost}$

La velocità media è quella velocità costante (pendenza linea blu) che il punto materiale dovrebbe tenere per percorrere il tratto $S = 50 \text{ km}$ nel tempo $t = 4,9 \text{ h}$:

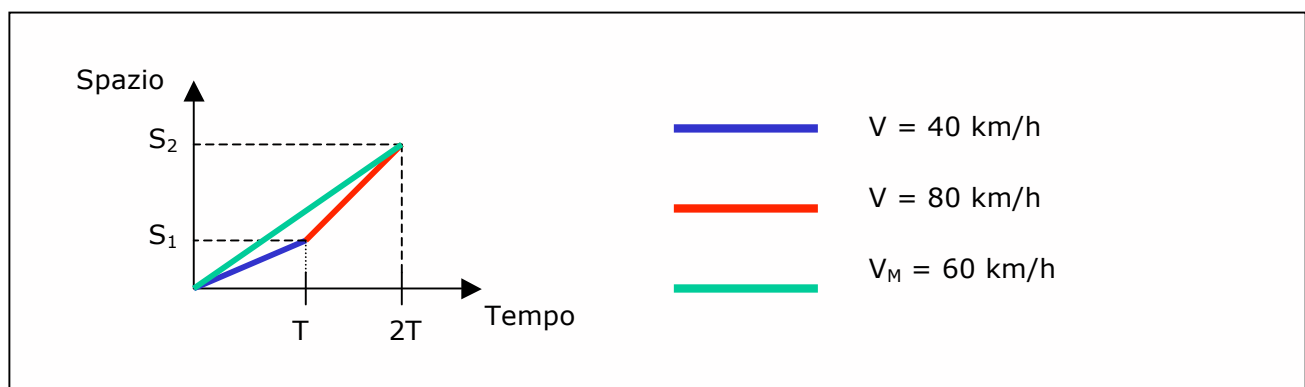
$$V_{\text{media}} = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{50}{4,9} = 10,2 \text{ km/h} = 2,8 \text{ m/s}$$

PROBLEMA

Un'automobile viaggia per un certo tempo T alla velocità di 40 km/h e poi per lo stesso tempo alla velocità di 80 km/h . Trovare la velocità media.

Soluzione

Analizziamo il problema prima graficamente, riportando sugli assi cartesiani le due velocità (40 km/h linea blu; 80 km/h) e quindi quella media (linea verde):



La velocità media si ottiene dalla sua definizione, tenendo presente che in ogni T lo spazio percorso è diverso :

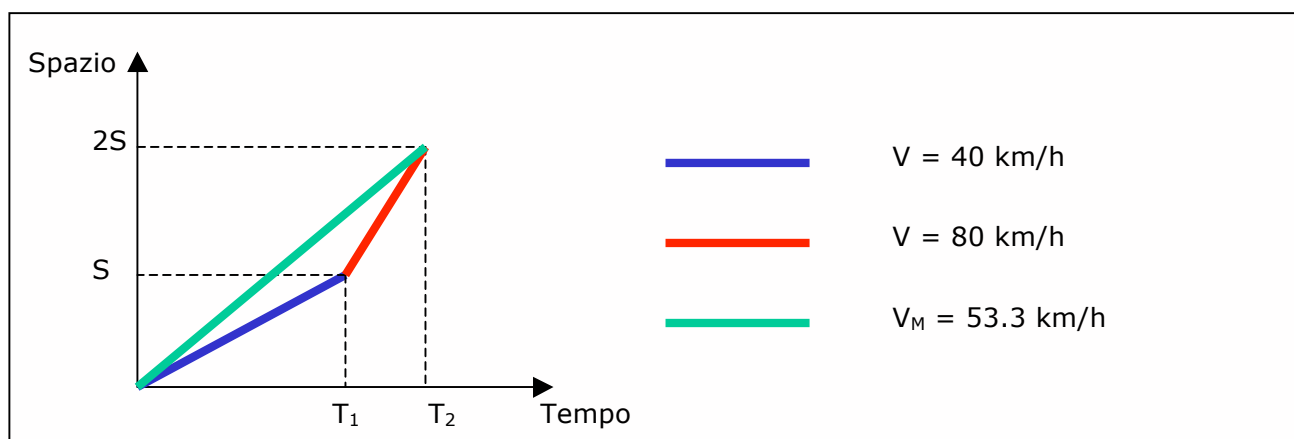
$$V_M = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{V_1 \cdot T + V_2 \cdot T}{T + T} = \frac{T \cdot (V_1 + V_2)}{2T} = \frac{V_1 + V_2}{2} = \frac{40 + 80}{2} = 60 \text{ km/h}$$

PROBLEMA

Un'automobile viaggia per un certo tempo T alla velocità di 40 km/h, percorrendo un cammino S , e poi per lo stesso tragitto S alla velocità di 80 km/h. Trovare la velocità media.

Soluzione

Analizziamo il problema prima graficamente, riportando sugli assi cartesiani le due velocità (40 km/h linea blu; 80 km/h) e quindi quella media (linea verde):



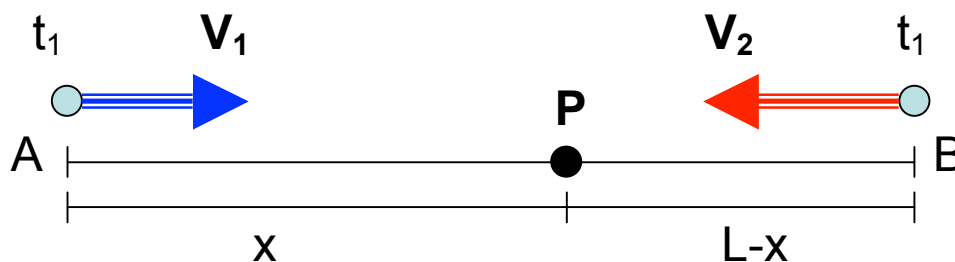
La velocità media si ottiene dalla sua definizione, tenendo presente che in T_1 e T_2 l'automobile percorre lo stesso tragitto S :

$$V_M = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S + S}{\frac{S}{V_1} + \frac{S}{V_2}} = \frac{2S}{S \cdot \left(\frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2} \right)} = \frac{2}{\frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2}} = \frac{2}{\frac{V_2 + V_1}{V_1 \cdot V_2}} = \frac{2V_1 \cdot V_2}{V_1 + V_2} = \frac{2 \cdot 40 \cdot 80}{40 + 80} = 53.3 \text{ km/h}$$

PROBLEMA

Anna e Lucia, che abitano a 15 km di distanza, decidono di incontrarsi. Anna parte alle 16^h 18^m con la sua bicicletta alla velocità di 20 km/h; Lucia parte alle 16^h 24^m e tiene una velocità di 25 km/h. A che ora s'incontrano e in quale posizione?

Soluzione



Indichiamo con:

$AP = x$ il punto nel quale A e B si incontrano

Ovviamente, poiché il problema chiede di determinare l'ora di incontro, il **tempo impiegato da A e B per raggiungere il punto P è lo stesso**, solo che bisogna tener presente che B parte con 6 minuti di ritardo:

$$1) \quad t_A = \frac{x}{V_1} \qquad 2) \quad t_B = \frac{L-x}{V_2} + 0,1$$

$$t_A = t_B \Rightarrow \frac{x}{V_1} = \frac{L-x}{V_2} + 0,1 \Rightarrow \frac{x}{20} = \frac{15-x}{25} + 0,1 \Rightarrow 5x = 60 - 4x + 10 \Rightarrow 9x = 70 \Rightarrow x = 7,8 \text{ km}$$

notare: le velocità sono espresse in km/h, le distanze in km per cui i 6 minuti di ritardo vanno trasformati in ore ($6^m = 6/60 = 0,1^h$).

Per trovare l'ora d'incontro, possiamo utilizzare indifferentemente la 1) o la 2):

$$t_A = \frac{x}{V_1} = \frac{7,8}{20} = 0,39^h$$

Trasformando le ore in minuti: $0,39 \cdot 60 = 23^m$, otteniamo che:

$$t_{\text{incontro}} = 16^h 18^m + 23^m = 16^h 41^m$$

PROBLEMA

Un'automobile, durante una frenata uniforme, passa in un minuto dalla velocità di 40 km/h a quella di 28 km/h. Trovare il valore dell'accelerazione e dello spazio percorso

Soluzione

La macchina passando da una velocità iniziale di 40 km/h a quella finale di 28 km/h, subisce una decelerazione data da:

$$a = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{V_F - V_I}{t} = \frac{7.8 - 11.1}{60} = -0,055 \text{ m/s}^2$$

notare:

- $40 \text{ km/h} = 11.1 \text{ m/s}$ $28 \text{ km/h} = 7.8 \text{ m/s}$ $1 \text{ minuto} = 60 \text{ secondi}$
- il valore negativo dell'accelerazione sta ad indicare che la macchina decelera

Poiché la decelerazione avviene in modo costante, si tratta di un moto uniformemente accelerato descritto dalla seguente legge del moto:

$$S = V_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2 = 11.1 \cdot 60 - \frac{1}{2} \cdot 0.055 \cdot 60^2 = 567 \text{ m}$$

PROBLEMA

Un'automobile, che viaggia alla velocità $v=120 \text{ km/h}$, è a 190 m da un semaforo quando scatta il giallo. L'automobilista frena e l'automobile rallenta con una accelerazione $a=3,0 \text{ m/s}^2$. Dopo 10 s il semaforo dal giallo passa al rosso. a) Che velocità ha l'automobile quando si accende il rosso? b) In tale istante l'automobile ha già superato la linea del semaforo? c) Cosa succederebbe se il moto fosse rettilineo uniforme?

Soluzione

a) Applichiamo la legge oraria della velocità:

$$v_f = v_0 - at = 33,3 - 3 \cdot 10 = 3,3 \text{ m/s} = 12 \text{ km/h}$$

dove:

$$120 \text{ km/h} = 33,3 \text{ m/s}$$

$$3,3 \text{ m/s} = 12 \text{ km/h}$$

b) Applichiamo la legge oraria del moto:

$$s = v_0 t - \frac{1}{2} at^2 = 33,3 \cdot 10 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 10^2 = 183 \text{ m}$$

Quando scatta il rosso, l'automobilista non ha superato la linea del semaforo.

c) Se il moto fosse rettilineo uniforme, l'automobilista percorrerebbe i 190 m che lo separano dal semaforo in un tempo pari a:

$$\Delta t = \frac{\Delta s}{\Delta v} = \frac{190}{33,3} = 5,7 \text{ s}$$

per cui, quando il semaforo passa dal giallo al rosso dopo 10 s , l'automobilista ha già superato la linea del semaforo quando era ancora verde.

PROBLEMA

Un sasso viene lanciato da un ponte con una velocità di 20 m/s diretta verso l'alto. Il sasso cade nel fiume dopo 6 s. Calcola quanto è alto il ponte rispetto al fiume ($g=10 \text{ m/s}^2$).

Soluzione

Il problema è scomponibile in due tratti: salita e discesa.

➤ Salita

Tempo di salita:

$$t_s = \frac{\Delta v}{g} = \frac{0 - 20}{-10} = 2 \text{ s}$$

Altezza massima raggiunta:

$$h_s = v_0 t_s - \frac{1}{2} g t_s^2 = 20 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 2^2 = 20 \text{ m}$$

➤ Discesa

$$h_d = \frac{1}{2} g t_d^2 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 4^2 = 80 \text{ m} \quad \text{dove: } t_d = t - t_s = 6 - 2 = 4 \text{ s}$$

Il ponte è alto:

$$h = h_d - h_s = 80 - 20 = 60 \text{ m}$$

PROBLEMA

Due ciclisti transitano allo stesso istante di tempo in un incrocio. Il primo ha una velocità di 29 km/h e il secondo di 31 km/h. Ciascuno mantiene costante la propria velocità. Dopo quanto tempo il loro distacco è di 750 m? (esprimere il risultato in minuti e secondi).

Soluzione

Il distacco è dato dalla differenza delle loro posizioni:

$$\Delta s = s_2 - s_1 = (v_2 - v_1) \Delta t$$

da cui:

$$\Delta t = \frac{\Delta s}{\Delta v} = \frac{0,75}{2} = 0,375 \text{ h} = 22'30''$$

PROBLEMA

Una palla viene lanciata verso il basso da un'altezza di 15 m e con una velocità iniziale $V_0=10\text{m/s}$. Calcolare la velocità con cui tocca il suolo.

Soluzione

Le equazioni che descrivono il moto, in base alla scelta del sistema di riferimento, sono:

$$\begin{cases} v = v_0 + gt \\ s = v_0 t + \frac{1}{2} gt^2 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione ricaviamo il tempo di caduta:

$$15 = 5t + \frac{1}{2} \cdot 9,8t^2 \Rightarrow 4,9t^2 + 5t - 15 = 0 \Rightarrow t = \frac{-5 \mp \sqrt{25 + 294}}{9,8} = \frac{-5 \mp 17,9}{9,8} = \begin{cases} t_1 = -2,3\text{s} \\ t_2 = 1,3\text{s} \end{cases}$$

La prima soluzione non ha significato (non ha senso un tempo negativo), per cui il tempo di caduta è dato dalla seconda soluzione, cioè $t=1,3\text{ s}$.

Sostituendo il valore di $t=1,3\text{ s}$ nella prima equazione del sistema, otteniamo la velocità con cui la palla raggiunge il suolo:

$$v = 5 + 9,8 \cdot 1,3 = 18\text{m/s}$$

PROBLEMA

Un treno si muove tra due stazioni, poste a 1,5 km di distanza. Percorre la prima metà del tragitto di moto uniformemente accelerato e la seconda di moto uniformemente ritardato. Data la velocità massima di 50 km/h, calcolare il valore dell'accelerazione e il tempo totale di percorrenza.

Soluzione

Bisogna risolvere un sistema di due equazioni formate dalle leggi del moto e della velocità, che ammetterà come soluzione l'accelerazione "a" ed il tempo totale di percorrenza "T", tenendo presente che il tempo della fase di accelerazione è lo stesso di quello della fase di decelerazione, così come i due tragitti:

$$\begin{cases} \frac{S}{2} = \frac{1}{2} a \cdot \left(\frac{T}{2}\right)^2 \\ V_{\text{Max}} = a \cdot \frac{T}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 750 = \frac{1}{2} a \cdot \left(\frac{T}{2}\right)^2 \\ 13,9 = a \cdot \frac{T}{2} \end{cases}$$

Applichiamo il metodo di sostituzione, ricavando T dalla seconda equazione e sostituendola nella prima equazione:

$$\begin{cases} T = \frac{27,8}{a} \\ 750 = \frac{1}{2} a \cdot \left(\frac{27,8}{2a}\right)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T = \frac{27,8}{a} \\ 750 = \frac{1}{2} a \cdot \frac{773}{4a^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T = \frac{27,8}{a} \\ 6000a = 773 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T = \frac{27,8}{a} = \frac{27,8}{0,13} = 214\text{s} \\ a = \frac{773}{6000} = 0,13\text{m/s}^2 \end{cases}$$

PROBLEMA

Un'automobile viaggia a 120 km/h. Visto un ostacolo, il conducente riesce a fermarsi in 110 m. Qual è l'accelerazione e quanto tempo impiega?

Soluzione

Tenendo presente che la macchina decelera, quindi l'accelerazione è negativa, e che la velocità finale è nulla, perché dopo 110 m la macchina si ferma, le leggi da applicare sono le seguenti:

$$\begin{cases} (1) \Rightarrow S = V_I \cdot T - \frac{1}{2} a \cdot T^2 \\ (2) \Rightarrow V_F = V_I - a \cdot T \end{cases}$$

Ricaviamo T dalla seconda equazione:

$$(3) \quad T = \frac{V_I}{a}$$

e sostituiamola nella prima, otteniamo un'equazione nella sola incognita "a":

$$S = V_I \cdot \frac{V_I}{a} - \frac{1}{2} a \cdot \left(\frac{V_I}{a} \right)^2 = \frac{V_I^2}{a} - \frac{1}{2} a \cdot \frac{V_I^2}{a^2} = \frac{V_I^2}{a} - \frac{V_I^2}{2a}$$

la cui soluzione è:

$$2a \cdot S = 2V_I^2 - V_I^2 \Rightarrow 2a \cdot S = V_I^2 \Rightarrow a = \frac{V_I^2}{2S} = \frac{33.3^2}{2 \cdot 110} = 5.04 \text{ m/s}^2$$

A questo punto, utilizzando la (3), calcoliamo il tempo di arresto:

$$T = \frac{33.3}{5.04} = 6.61 \text{ s}$$

PROBLEMA

Una palla viene lanciata da terra verso l'alto con una velocità iniziale $V_i = 12 \text{ m/s}$.

1. Quanto tempo impiega a raggiungere il punto più alto della traiettoria?
2. Quanto vale l'altezza massima raggiunta?
3. Dopo quanto tempo ricade a terra?
4. Con che velocità tocca terra?

Soluzione

1. Poiché si tratta del moto di un grave, la legge da applicare è la seguente:

$$g = \frac{V_F - V_I}{t} \Rightarrow g = \frac{-V_I}{t} \Rightarrow t = \frac{-V_I}{g} = \frac{-12}{-9.8} = 1.2 \text{ s}$$

NOTARE:

- Nel punto più alto raggiunto la palla si ferma, quindi $V_{\text{Finale}} = 0$
- Nel moto verso l'alto la forza di gravità, quindi "g", agisce nel verso opposto, per cui la "g" è negativa

2. Per calcolare la massima altezza raggiunta, applichiamo la legge del moto di un grave:

$$S = V_I \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2 = 12 \cdot 1.2 - \frac{1}{2} \cdot 9.8 \cdot 1.2^2 = 7.3\text{m}$$

3. Il tempo di caduta è uguale a quello di salita (perché???)

4. Per calcolare la velocità con la quale la palla tocca terra, basta applicare la stessa legge al punto 1., tenendo presente che in questo caso la velocità iniziale è nulla e la "g" è positiva:

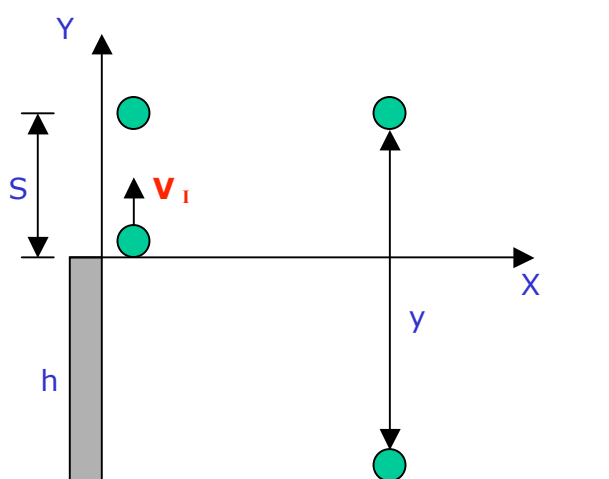
$$V_F = g \cdot t = 9.8 \cdot 1.2 = 12\text{m/s}$$

NOTARE:

- La velocità finale coincide con quella iniziale (perché???)

PROBLEMA

Un uomo lancia un sasso dal tetto di un palazzo verso l'alto, con una velocità di 12.25m/s. Il sasso raggiunge il suolo dopo 4.25 s. Si calcoli: 1) L'altezza del palazzo; 2) La massima altezza raggiunta dal sasso rispetto a terra; 3) La velocità con cui il sasso tocca il suolo.

Soluzione

Per calcolare lo spazio S percorso nella fase di salita, dobbiamo prima calcolare il tempo impiegato per percorrerlo, tenendo presente che la velocità raggiunta nel punto più alto è nulla e che la "g" in questa fase è negativa:

$$g = \frac{V_F - V_I}{T_{\text{salita}}} \Rightarrow g = \frac{-V_I}{T_{\text{salita}}} \Rightarrow T_{\text{salita}} = \frac{-V_I}{g} = \frac{-12.25}{-9.8} = 1.25\text{s}$$

quindi:

$$S = V_1 \cdot T_{\text{salita}} - \frac{1}{2} g \cdot T_{\text{salita}}^2 = 12.25 \cdot 1.25 - \frac{1}{2} \cdot 9.8 \cdot 1.25^2 = 7.7\text{m}$$

A questo punto siamo in grado di calcolare la massima altezza raggiunta dal sasso rispetto a terra:

$$y = \frac{1}{2} g \cdot T_{\text{caduta}}^2 = \frac{1}{2} \cdot 9.8 \cdot 3^2 = 44.1\text{m}$$

dove: $T_{\text{caduta}} = T_{\text{totale}} - T_{\text{salita}} = 4.25 - 1.25 = 3\text{s}$

Pertanto l'altezza del palazzo sarà:

$$h = y - S = 44.1 - 7.7 = 36.4\text{m}$$

In conclusione, la velocità di arrivo al suolo sarà:

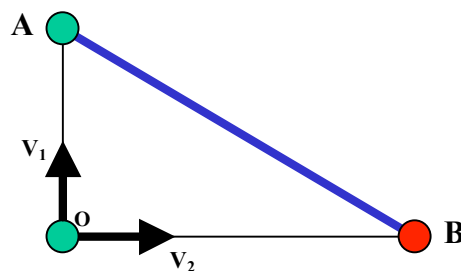
$$V_F = g \cdot T_{\text{caduta}} = 9.8 \cdot 3 = 29.4\text{m/s}$$

PROBLEMA

Due macchine viaggiano di moto uniforme lungo due strade rettilinee formanti tra loro un angolo retto. Calcolare a quale distanza, in linea d'aria, si trovano dopo 10 minuti, supponendo che le macchine siano partite allo stesso istante dall'incrocio delle due strade con velocità, rispettivamente, di 90 km/h e 144 km/h.

Soluzione

Schematizziamo innanzitutto il problema: ed osserviamo che la macchina B, essendo più veloce della macchina A, in 10 minuti percorrerà un tratto più lungo, infatti:



$$S_{OA} = V_1 \cdot t = 90 \cdot 0.17 = 15.3\text{km}$$

$$S_{OB} = V_2 \cdot t = 144 \cdot 0.17 = 24.5\text{km}$$

dove: 10 minuti = 10/60 = 0.17 ore

La distanza in linea d'aria tra le due macchine non è altro che l'ipotenusa AB del triangolo rettangolo OAB, che calcoliamo con il teorema di Pitagora:

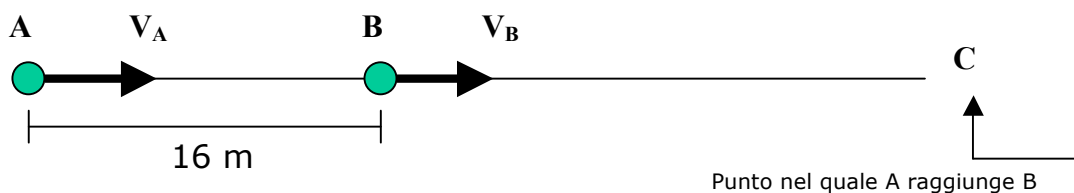
$$AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = \sqrt{15.3^2 + 24.5^2} = 28.9\text{km}$$

PROBLEMA

Due atleti, “A” e “B”, stanno facendo una gara. “A” parte 16 m dietro a “B” correndo alla velocità di 9 m/s. Se “B” corre alla velocità di 8 m/s, calcolare dopo quanto tempo “A” raggiungerà “B” e lo spazio percorso.

Soluzione

Schematizziamo il problema:



Quando A raggiungerà B nel punto C, ovviamente le posizioni dei due punti saranno le stesse rispetto all'origine del sistema di riferimento, scelto in A, per cui per calcolare il tempo del raggiungimento basta confrontare queste posizioni, tenendo presente che si tratta di un moto rettilineo uniforme :

$$\begin{cases} S_A = V_A \cdot t \\ S_B = 16 + V_B \cdot t \end{cases} \Rightarrow S_A = S_B \Rightarrow V_A \cdot t = 16 + V_B \cdot t \Rightarrow V_A \cdot t - V_B \cdot t = 16 \Rightarrow t \cdot (V_A - V_B) = 16 \Rightarrow$$

$$t = \frac{16}{V_A - V_B} = \frac{16}{9 - 8} = 16s$$

Pertanto, lo spazio percorso da A sarà:

$$S_A = 9 \cdot 16 = 144m$$

PROBLEMA

Un automobilista sta viaggiando alla velocità di 120 km/h ed il contachilometri segna 32640 km. Ad un certo istante l'automobilista frena e quando la macchina è ferma, legge sul contachilometri 32644 km. Calcolare la decelerazione, supposta costante ed il tempo di frenata.

Soluzione

Essendo un moto uniformemente decelerato, la legge del moto è:

$$S_{\text{Finale}} = S_{\text{Iniziale}} + V_{\text{Iniziale}} \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2 \quad (1)$$

Tenendo presente che alla fine della frenata la macchina è ferma, ossia $V_{\text{Finale}} = 0$, l'accelerazione sarà:

$$a = \frac{V_{\text{fin}} - V_{\text{ini}}}{t} = -\frac{V_{\text{ini}}}{t} \quad (2)$$

per cui la (1) diventa un'equazione di 1° grado nella sola incognita tempo:

$$32644 = 32640 + 120 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot \frac{120}{t} \cdot t^2 \Rightarrow 4 = 120 \cdot t - 60t \Rightarrow 60t = 4 \Rightarrow t = \frac{4}{60} = 0,066^{\text{h}} = 0,066 \cdot 60 = 4^{\text{m}}$$

Il valore della decelerazione si ricava applicando la (2):

$$a = -\frac{33,3\text{m/s}}{240\text{s}} = -0,14\text{m/s}^2$$

PROBLEMA

Un automobilista sta viaggiando a una velocità costante di 54 km/h. A un certo istante vede diventare rosso un semaforo distante 250 m e inizia a frenare (accelerazione costante) per 50 m; poi smette di frenare e percorre a velocità costante i successivi 200 m arrivando al semaforo quando scatta il verde. Tenendo conto che il rosso resta acceso esattamente per 30 s, si determini l'accelerazione dell'auto durante la frenata.

Soluzione

Legge del moto quando l'automobilista comincia a frenare costantemente (moto uniformemente accelerato con velocità iniziale pari a 54 km/h):

$$x = v_0 t_{\text{frenata}} - \frac{1}{2} a t_{\text{frenata}}^2 \rightarrow 50 = 15 t_{\text{fr}} - \frac{1}{2} a t_{\text{fr}}^2 \quad \text{dove: } 54 \text{ km/h} = 15 \text{ m/s}$$

Legge del moto quando l'automobilista smette di frenare per 200 m (moto rettilineo uniforme):

$$x = v(30 - t_{\text{fr}}) \rightarrow 200 = (15 - a t_{\text{fr}})(30 - t_{\text{fr}})$$

dove la velocità costante con cui percorre i successivi 200 m è quella che ha alla fine della frenata:

$$v = v_0 - a t \rightarrow v = 15 - a t_{\text{fr}}$$

L'accelerazione dell'auto durante la frenata sarà data dalla soluzione del seguente sistema:

$$\begin{cases} 50 = 15 t_{\text{fr}} - \frac{1}{2} a t_{\text{fr}}^2 \\ 200 = (15 - a t_{\text{fr}})(30 - t_{\text{fr}}) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a t^2 - 30 t + 100 = 0 \\ a t^2 + 30 a t + 15 t - 250 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \frac{30t - 100}{t^2} \\ t^2 \left(\frac{30t - 100}{t^2} \right) + 30t \left(\frac{30t - 100}{t^2} \right) + 15t - 250 = 0 \end{cases} \rightarrow 9t^2 + 110t - 600 = 0 \rightarrow t_1 = 4,1\text{s} \vee t_2 = -16,3$$

La soluzione negativa va scartata in quanto fisicamente non accettabile. E quindi:

$$\begin{cases} a = 1,4 \text{ m/s}^2 \\ t = 4,1 \text{ s} \end{cases}$$

PROBLEMA

All'istante $t_0=0$ s un'auto parte da ferma e in 10 s raggiunge (con accelerazione costante) la velocità di 108 km/h. Una moto, avente una velocità iniziale di 72 km/h, all'istante $t=0$ s affianca l'auto e inizia a frenare. Sapendo che la moto impiega 6 s per fermarsi, determinare l'istante in cui l'auto sorpassa la moto.

Soluzione

Scriviamo le due leggi orarie relative all'auto e alla moto:

$$\begin{cases} x_{\text{auto}} = \frac{1}{2} a_{\text{auto}} t^2 \\ x_{\text{moto}} = v_0 t - \frac{1}{2} a_{\text{moto}} t^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_{\text{auto}} = \frac{1}{2} \cdot 3 t^2 \\ x_{\text{moto}} = 20 t - \frac{1}{2} \cdot 3,3 t^2 \end{cases}$$

dove:

$$a_{\text{auto}} = \frac{\Delta v_{\text{auto}}}{\Delta t_{\text{auto}}} = \frac{30-0}{10} = 3 \text{ m/s}^2 \quad a_{\text{moto}} = \frac{\Delta v_{\text{moto}}}{\Delta t_{\text{moto}}} = \frac{0-20}{6} = -3,3 \text{ m/s}^2$$

$$108 \text{ km/h} = 30 \text{ m/s} \quad 72 \text{ km/h} = 20 \text{ m/s}$$

Le soluzioni del sistema sono:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \text{ m} \\ t_1 = 0 \text{ s} \end{cases} \vee \begin{cases} x_2 \approx 60 \text{ m} \\ t_2 = 6,3 \text{ s} \end{cases}$$

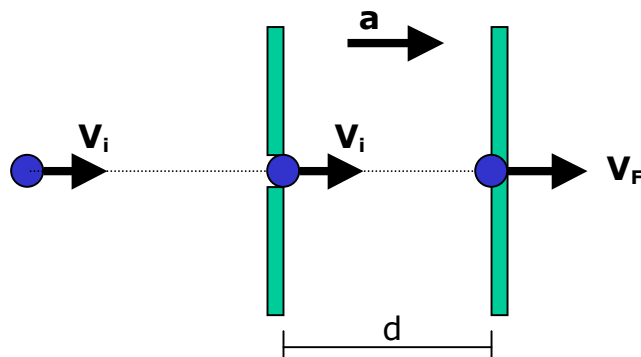
- La prima soluzione non ci dice niente di nuovo, ossia rappresenta la situazione in cui i due veicoli si trovano affiancati (situazione che scegliamo nell'origine del sistema di riferimento $x=0$ m) all'istante $t=0$ s.
- La seconda soluzione, invece, rappresenta la situazione in cui l'auto sorpassa la moto. Ossia l'auto sorpassa la moto all'istante $t=6,3$ s dopo aver percorso circa 60 m.

PROBLEMA

Un elettrone parte con velocità iniziale di 5 cm/s muovendosi di moto rettilineo uniforme. Esso raggiunge una zona in cui è presente un'accelerazione costante $a=1 \text{ cm/s}^2$ prodotta da un campo elettrico fra due piastre come in figura. Supponendo che tale zona sia lunga $d=30 \text{ cm}$, calcolare:

- quanto tempo impiega l'elettrone a raggiungere la seconda piastra;
- con quale velocità la raggiunge.

Soluzione



- Le equazioni da utilizzare sono quelle del moto uniformemente accelerato. Supponendo di fissare un sistema di riferimento con l'origine degli assi sulla prima piastra, la legge oraria del moto sarà:

$$x_0 = V_i \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2 \quad (1)$$

dove V_i è la velocità costante con la quale l'elettrone giunge sulla prima piastra.

Sostituendo i dati nella (1), otteniamo un'equazione di 2° grado nell'incognita t :

$$30 = 5t + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot t^2 \Rightarrow t^2 + 10t - 60 = 0 \Rightarrow t = \frac{-10 \pm \sqrt{100 + 240}}{2} = \frac{-10 \pm 18,4}{2} \Rightarrow t_1 = 4,22s \rightarrow t_2 = -14,2s$$

dove per ragioni fisiche (un tempo negativo non ha senso) la soluzione negativa viene scartata.

- Per calcolare la velocità con la quale l'elettrone raggiunge la seconda piastra, applichiamo la seguente legge oraria della velocità:

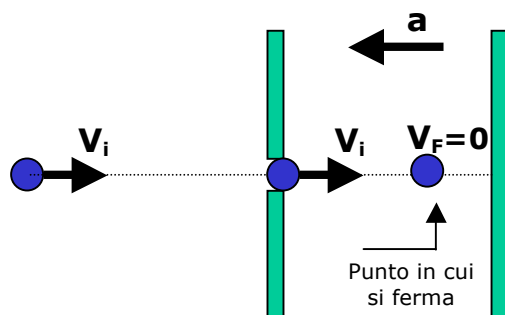
$$v_f = v_i + a \cdot t = 5 + 1 \cdot 4,22 = 9,22 \text{ cm/s}$$

PROBLEMA

Un elettrone parte con velocità iniziale di 5 cm/s muovendosi di moto rettilineo uniforme. Esso raggiunge una zona in cui è presente un'accelerazione costante $a = -0,5 \text{ cm/s}^2$ prodotta da un campo elettrico fra due piastre come in figura. Calcolare:

- dopo quanto tempo l'elettrone si ferma;
- il punto in cui si ferma;
- cosa succede dopo che si è fermato.

Soluzione



- Le equazioni da utilizzare sono quelle del moto uniformemente accelerato, tenendo presente che l'accelerazione è negativa. Supponendo di fissare l'origine del sistema di riferimento sulla prima piastra, la legge oraria della velocità ci consente di trovare dopo quanto tempo l'elettrone si ferma:

$$v_f = v_i + a \cdot t \Rightarrow 0 = 5 - 0,5t \Rightarrow t = \frac{5}{0,5} = 10s$$

dove V_i è la velocità costante con la quale l'elettrone giunge sulla prima piastra.

- Applicando la legge oraria del moto, troveremo il punto, rispetto all'origine, in cui si ferma l'elettrone:

$$x = v_i \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2 = 5 \cdot 10 - \frac{1}{2} \cdot 0,5 \cdot 10^2 = 25cm$$

L'elettrone, nel punto in cui si ferma, sarà sottoposto ad una accelerazione verso sinistra che lo porterà a ripercorrere, con le stesse modalità, il percorso verso destra. dove V_i è la velocità costante con la quale l'elettrone giunge sulla prima piastra.

PROBLEMA

Una palla viene lanciata verso il basso da un'altezza di 35 m e tocca il suolo con una velocità $V_f=30$ m/s. Calcolare la velocità con cui è stata lanciata la pallina.

Soluzione

Si tratta del moto di un grave lanciato verso il basso (g positiva), quindi di un moto uniformemente accelerato. Scegliendo come origine degli assi del sistema di riferimento la posizione del grave all'istante $t=0$ s, allora il moto sarà descritto dalle seguenti leggi:

$$\begin{cases} h = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2 \\ v_f = v_0 + a t \end{cases}$$

dimostrazione

$$\begin{cases} s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \\ v_f = v_0 + a t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s - s_0 = v_0 \left(\frac{v_f - v_0}{a} \right) + \frac{1}{2} a \left(\frac{v_f - v_0}{a} \right)^2 \\ t = \frac{v_f - v_0}{a} \end{cases}$$

$$s - s_0 = \frac{v_0}{a} (v_f - v_0) + \frac{1}{2a} (v_f - v_0)^2$$

$$2a(s - s_0) = 2v_0(v_f - v_0) + (v_f - v_0)^2$$

$$2a(s - s_0) = (v_f - v_0)(2v_0 + v_f - v_0)$$

$$2a(s - s_0) = (v_f - v_0)(v_f + v_0)$$

$$2a(s - s_0) = v_f^2 - v_0^2$$

Da questo sistema, attraverso vari passaggi algebrici (vedere dimostrazione), si ricava la seguente importante relazione:

$$2gh = v_f^2 - v_0^2$$

da cui è possibile ottenere la velocità iniziale con cui è stata lanciata la pallina:

$$v_0^2 = v_f^2 - 2gs \Rightarrow v_0 = \sqrt{v_f^2 - 2gh} = \sqrt{30^2 - 2 \cdot 9,81 \cdot 35} = 14,6 \text{ m/s}$$

PROBLEMA

Due gravi vengono lanciati verticalmente verso l'alto da uno stesso punto, entrambi con velocità iniziale 9,8 m/s. Sapendo che tra i due lanci intercorre un intervallo di tempo di 1 sec, determinare dopo quanto tempo dal primo lancio i due gravi s'incontrano.

Soluzione

Calcoliamo il tempo che impiega il primo grave a raggiungere la massima altezza, sapendo che nel punto più alto la velocità è zero $V_F = 0 \text{ m/s}$:

$$V_F = V_0 - gt \Rightarrow t = \frac{V_0}{g} = \frac{9,8}{9,8} = 1 \text{ sec}$$

Pertanto quando il primo grave raggiunge la massima altezza, il secondo grave viene lanciato verso l'alto, quindi il primo grave incontrerà il secondo grave durante la fase di discesa. Poiché i due gravi sono stati lanciati con la stessa velocità iniziale, si incontreranno dopo un tempo t con la stessa velocità, per cui:

$$\text{corpo 1} \quad V_F = gt \qquad \text{corpo 2} \quad V_F = V_0 - gt$$

$$gt = V_0 - gt \Rightarrow 2gt = V_0 \Rightarrow t = \frac{V_0}{2g} = \frac{9,8}{19,6} = 0,5 \text{ sec}$$

I due gravi si incontreranno dopo un tempo pari a $t = 1 + 0,5 = 1,5 \text{ sec}$

PROBLEMA

Un corpo parte, ad un certo istante e dall'origine del sistema di riferimento, con velocità costante $V_1=2\text{m/s}$. Un secondo corpo parte sempre dall'origine ma dopo un tempo $t=5 \text{ sec}$ muovendosi di moto uniformemente accelerato con $a=0,1 \text{ m/s}^2$ e con velocità iniziale nulla.

Calcolare:

- ❑ dopo quanto tempo e dove i due corpi s'incontrano;
- ❑ qual è la velocità del secondo corpo al momento dell'incontro.

Soluzione

- Il primo corpo si muove di moto uniforme, per cui la distanza percorsa dopo il tempo $t = 5\text{ s}$ è data da:

$$d = v_1 \cdot t = 2 \cdot 5 = 10\text{m}$$

Dopo il tempo $t = 5\text{ s}$ il corpo 1 continua a muoversi di moto uniforme, mentre il corpo 2 comincia il suo moto uniformemente accelerato, per cui le leggi orarie del moto saranno:

$$x_1 = d + v_1 \cdot t \qquad x_2 = \frac{1}{2} a \cdot t^2$$

Quando i due corpi s'incontrano, si troveranno nella stessa posizione rispetto all'origine, per cui la condizione da imporre è la seguente:

$$x_1 = x_2 \Rightarrow d + v_1 \cdot t = \frac{1}{2} a \cdot t^2$$

dove sostituendo i valori, si ottiene un'equazione di 2° grado nell'incognita t :

$$10 + 2t = \frac{1}{2} \cdot 0,1 \cdot t^2 \Rightarrow 0,05t^2 - 2t - 10 = 0 \Rightarrow t = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 2}}{0,1} = \frac{2 \pm 2,4}{0,1} \Rightarrow t_1 = 44\text{s} \rightarrow t_2 = -4\text{s}$$

dove per ragioni fisiche (un tempo negativo non ha senso) la soluzione negativa viene scartata.

I due corpi s'incontrano in:

$$x_1 = x_2 = 10 + 2 \cdot 44 = 98\text{m}$$

- La velocità con la quale il corpo 2 incontra il corpo 1 viene calcolata utilizzando la legge oraria della velocità:

$$v_2 = a \cdot t = 4,4\text{m/s}$$